ගණිත අභ්‍යුහනය

(1) n යනු ධන නිඛිලයක් ද $f(n) \equiv 3^{2n} + r$ ද නම් $f(n+1) - f(n)$ යන්න හරියටම 8 න් බෙදිය හැකි බව පෙන්වන්න. **එනයින්**, $f(n)$ හරියටම 8 න් බෙදෙන බව පෙන්වන්න. (1977)

(2) i) n යනු ඕනෑම ධන නිඛිලයක් විට $f(n) \equiv n^3 + 6n^2 + 8n$ නම්, $f(n)$ යන්න 3 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

ii) $\sum_{r-1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2n+1}}$ බව ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් සාධනය කරන්න. (1979 අතුරු)

(3) r හි සියලු ධන නිඛිල අගය සඳහා $\frac{1}{r!} \leq \frac{1}{2^{r-1}}$ බව ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ පෙන්වන්න. (1977)

(4) $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots\ldots\ldots + n.n! = (n+1)! - 1$ බව අභ්‍යුහනයෙන් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ සාධනය කරන්න. (1978)

(5) සාමාන්‍ය අංකනය අනුව ${}^{n}C_r < n^{n-1}C_{r-1}$, $r = 2,3,\ldots..n$ බව පෙන්වන්න. $(1+x)^n = 1 + {}^{n}C_1x + {}^{n}C_2x^2 + \ldots\ldots {}^{n}C_{n-1}x^{n-1} + x^n$ බව දී තිබෙන විට, $(a+b)^n = a^n + {}^{n}C_1a^{n-1}b + {}^{n}C_2a^{n-2}b^2 + \ldots. {}^{n}C_{n-1}ab^{n-1} + b^n$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින් a ත් b ත් ධන ද $n > 2$ ද නම්, $(a+b)^n - a^n < nb(a+b)^{n-1}$ බව පෙන්වන්න. (1981)

(6) අ) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, ${}^{n}C_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$ විට ${}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ බව සාධනය කරන්න.

ආ) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, $(1+x)^n = {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1x + \ldots..{}^{n}C_rx^r + \ldots + {}^{n}C_nx^n$ බව ගණිත අභ්‍යුහනය මගින් සාධනය කරන්න.

ඉ) $(1+x)^{2n} \equiv (1+x)^n\ (1+x)^n$ යන්න ද්විපද ප්‍රසාරණය ද භාවිතයෙන් ${}^{2n}C_n = ({}^{n}C_0)^2 + ({}^{n}C_1)^2 + \ldots\ldots\ldots + ({}^{n}C_n)^2$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(7) ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. p සහ n යනු ධන නිඛිල නම්, එවිට p^n මගින් $(1+p)\,p^{n-1} - 1$ බෙදෙන බව සාධනය කරන්න. [ඉඟිය : $(1+p)\,p^n = (1+p)\,p^{n-1}(1+p)\,p^{n-1} \ldots\ldots\ldots (1+p)\,p^{n-1}$: මෙහි සාධක p ඇත.] (1984)

(8) අ) $n = 1, 2, 3\ldots\ldots..$ සඳහා $A_{n+1} = (1-\boldsymbol{\alpha})(1 - A_n) + A_n$ සහ $A_1 = \boldsymbol{\beta}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\boldsymbol{\alpha}$ සහ $\boldsymbol{\beta}$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින්, සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $A_n = 1 - (1-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{r-1}^{n} Ar$ සොයන්න.

ආ) $1 \leq k \leq n$ වන සේ වූ k සහ n නිඛිල සඳහා $k\ {}^{n}C_k = n\ {}^{n-1}C_{k-1}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් , ඕනෑම $x \in \mathbb{R}$ සහ $n \geq 0$ සඳහා $\sum_{k=0}^{n} k\ {}^{n}C_k\, x^k (1-x)^{n-k} = nx$ බව සාධනය කරන්න. (2001)

(9) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යොදාගනිමින්, සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $n! \geq 2^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{k-0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින්, $e \leq 3$ බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු ප්‍රකෘති ලඝු ගණකවල පාදය වේ. (2002)

(10) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යොදාගනිමින්, සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා ම $8\,(n+1)\,! > 2^{n+1}\,(n+2)$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{2^k} > \frac{1}{16}\,(n^2+3n+4)$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{2^k}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න. (2003)

(11) ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින්, සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහාම $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+2)}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න. (2004)

(12) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යොදාගනිමින්, සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා ම $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$ බව සාධනය කරන්න.
$\frac{1}{4}-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)}<\frac{1}{100}$ වන කුඩාතම n නිඛිලය සොයන්න. (2005)

(13) p යනු නිඛිලයක් යැයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා $p^{n-1}+(p+1)^{2n-1}$ යන්න p^2+p+1 යන්නෙක් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න. (2006)

(14) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. a,b හා d යනු $a=b+d$ වන අයුරින් වූ නිඛිල වේ. $a^n-b^{n-1}(b+nd)$ යන්න ධන නිඛිලමය n සඳහා d^2 න් බෙදිය හැකි බව පෙන්වන්න.
U යනු පළමු පදය a හා පොදු අන්තරය d වන සමාන්තර ශ්‍රේඩියක n වෙනි පදය නම්, $a^n-(a-d)^{n-1}\,U$ යන්න d^2 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න. $7^{60}-3^{64}$ යන්න 16 න් බෙදිය හැකි බව අපෝහනය කරන්න. (2007)

(15) ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{34n}{105}$ යන්න නිඛිලයක් බව සාධනය කරන්න. (2007)

(16) a) ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $5^{n+1}-2^{n+1}-3^{n+1}$ යන්න 6 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න.

b) $\sum_{r=1}^{\infty}C_r$ සොයා ධන නිඛිලමය n සඳහා $\frac{2^n}{n}>\frac{(n-1)}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.(2008)

(17) $P_n = n\,(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)$ යැයි ගනිමු. මෙහි n සහ r ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා වේ. $nP_{n+1} = nP_n + r\,P_n$ බව පෙන්වන්න. $P_n\,/\,n$ යන්න $(r-1)!$ වලින් බෙදෙන බව උපකල්පනය කර $P_{n+1}-P_n$ යන්න $r!$ වලින් බෙදෙන බව පෙන්වන්න. අනුයාත ධන නිඛිල r සංඛ්‍යාවක ගුණිතය $r!$ වලින් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න. (2009)

(18) ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය භාවිත කර ගනිමින් $(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r\,x^{n-r}y^r$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් වන අතර ${}^nC_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ වේ. $(p+q)^n-p^n-q^n$ යන්න pq වලින් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි p, q සහ n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා වේ. (2009)

(19) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $n^3 + 5n$ යන්න 3 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න. (2011)

(20) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදාගෙන ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ බව සාධනය කරන්න. (2012)

(21) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(2r+1) = n(n+2)$ බව සාධනය කරන්න. (2013)

(22) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(3r-1) = n^2(n+1)$ බව සාධනය කරන්න. (2014)

(23) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $8^n - 3^n$ යන්න 5 හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න. (2015)